

Inhaltsverzeichnis

Wahrscheinlichkeit

W.1 Wahrscheinlichkeiten

W.1.1 Ereignisraum, Grundraum 1
 W.1.2 Wahrscheinlichkeitsmass 1
 W.1.3 Endliche Räume 1
 W.1.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit 1
 W.1.5 Unabhängigkeit 2

W.2 Zufallsvariablen

W.2.1 Diskrete Zufallsvariablen 2
 W.2.2 Stetige Zufallsvariablen 2
 W.2.3 Transformation von Zufallsvariablen 2
 W.2.4 Simulation von Verteilungen 2
 W.2.5 Erwartungswert 3
 W.2.6 Varianz und Standardabweichung 3

W.3 Wichtige Verteilungen

W.3.1 Diskrete Verteilungen 3
 W.3.2 Stetige Verteilungen 4

W.4 Gemeinsame Verteilungen

W.4.1 Randverteilungen 5
 W.4.2 Bedingte Verteilung 5
 W.4.3 Unabhängigkeit 5
 W.4.4 Funktionen von Zufallsvariablen 5
 W.4.5 Erwartungswert 6
 W.4.6 Kovarianz und Korrelation 6

W.5 Grenzwertsätze

W.5.1 Gesetz der grossen Zahlen 6
 W.5.2 Zentraler Grenzwertsatz 6
 W.5.3 Chebyshev-Ungleichung 7
 W.5.4 Monte Carlo Integration 7

Statistik

S.1 Grundlagen

S.2 Deskriptive Statistik

S.2.1 Histogramm 7
 S.2.2 Boxplot 7
 S.2.3 QQ-Plot 8

S.3 Schätzer

S.3.1 Momenten-Methode 8
 S.3.2 Maximum-Likelihood 8

S.4 Tests

S.4.1 Fehler 1. und 2. Art 9
 S.4.2 Mögliches Vorgehen 9
 S.4.3 Likelihood-Quotienten Test 9
 S.4.4 z-Test 9
 S.4.5 t-Test 9
 S.4.6 Gepaarter Zweistichprobentest 9
 S.4.7 Ungepaarter Zweistichprobentest 9
 S.4.8 Konfidenzbereiche 10

Anhang

A.1 Kombinatorik

A.2 Reihen und Integrale

Wahrscheinlichkeit

1 W.1 Wahrscheinlichkeiten

1 W.1.1 Ereignisraum, Grundraum

Ereignisraum: Der *Ereignisraum* oder *Grundraum* Ω ist die Menge aller möglichen Ereignisse eines Zufallexperiments. Die Elemente $\omega \in \Omega$ heissen *Elementarereignisse*.

Ereignis: Ein *Ereignis* $A \subseteq \Omega$ ist eine Teilmenge von Ω .

Die Klasse aller *beobachtbaren Ereignisse* \mathcal{F} ist eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ von Ω .

2 W.1.2 Wahrscheinlichkeitsmass

Wahrscheinlichkeitsmass: Ein *Wahrscheinlichkeitsmass* \mathbb{P} ist eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ mit folgenden Eigenschaften:

- i: $\mathbb{P}[\Omega] = 1$.
- ii: $\mathbb{P}[A] \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{F}$.
- iii: $\mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$ falls $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

Aus den Axiomen i bis iii folgen direkt die Rechenregeln:

- i: $\mathbb{P}[A^C] = 1 - \mathbb{P}[A]$.
- ii: $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$.
- iii: $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$.
- iv: $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$ (*Additionsregel*).

6 W.1.3 Endliche Räume

Für einen endlichen Raum $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ mit $\mathbb{P}[\omega_i] = p_i$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt

$$\mathbb{P}[A] = \sum_{i \text{ mit } \omega_i \in A} p_i$$

Laplace-Raum: In einem *Laplace-Raum* sind alle Ereignisse $\omega_1, \dots, \omega_n$ gleich wahrscheinlich ($p_i = p_j$ für alle i, j). Es gilt dann

$$P[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

8 W.1.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeit: Seien A, B Ereignisse und $\mathbb{P}[A] > 0$, dann ist die *bedingte Wahrscheinlichkeit* von B gegeben A definiert durch:

$$\mathbb{P}[B | A] := \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[A]}$$

Aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit folgt die *Multiplikationsregel*:

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[B | A]\mathbb{P}[A]$$

Satz (Totale Wahrscheinlichkeit): Sei $A_{1 \leq i \leq n}$ eine disjunkte Zerlegung von Ω , dann gilt für ein beliebiges Ereignis B :

$$\mathbb{P}[B] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}[B | A_i]\mathbb{P}[A_i]$$

Satz (Formel von Bayes): Sei A_1, \dots, A_n eine disjunkte Zerlegung von Ω mit $\mathbb{P}[A_i] > 0$ für alle i und B ein Ereignis mit $\mathbb{P}[B] > 0$, dann gilt für jedes k :

$$\mathbb{P}[A_k | B] = \frac{\mathbb{P}[B | A_k]\mathbb{P}[A_k]}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}[B | A_i]\mathbb{P}[A_i]}$$

W.1.5 Unabhängigkeit

Unabhängigkeit: Die Ereignisse A_1, \dots, A_n heißen *unabhängig*, wenn für alle $m \in \mathbb{N}$ und $\{k_1, \dots, k_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ gilt

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^m A_{k_i}\right] = \prod_{i=1}^m \mathbb{P}[A_{k_i}].$$

Hinweis: Bei unabhängigen Ereignissen A, B hat das Eintreten des einen Ereignisses keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit des anderen Ereignisses: $\mathbb{P}[B | A] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[A]} = \mathbb{P}[B]$

W.2 Zufallsvariablen

Zufallsvariable: Eine *Zufallsvariable* X auf Ω ist eine Funktion $X : \Omega \rightarrow \mathcal{W}(X) \subseteq \mathbb{R}$. Jedes Elementarereignis ω wird auf eine Zahl $X(\omega)$ abgebildet.

Verteilungsfunktion: Die *Verteilungsfunktion* einer Zufallsvariable X ist die Abbildung $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$,

$$F_X(t) := \mathbb{P}[X \leq t] := \mathbb{P}[\{\omega | X(\omega) \leq t\}].$$

Jede Verteilungsfunktion F_X hat folgende Eigenschaften:

- i: $a \leq b \Rightarrow F_X(a) \leq F_X(b)$ (monoton wachsend).
- ii: $\lim_{t \rightarrow u, t > u} F_X(t) = F_X(u)$ (rechtsstetig).
- iii: $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} F_X(t) = 1$.

W.2.1 Diskrete Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable heißt *diskret*, falls ihr Wertebereich $\mathcal{W}(X)$ endlich oder abzählbar ist.

Gewichtsfunktion: Die *Wahrscheinlichkeitsfunktion* oder *Gewichtsfunktion* einer diskreten Zufallsvariable X ist gegeben durch

$$p_X(x) = \begin{cases} \mathbb{P}[X = x] & \text{für } x \in \mathcal{W}(X) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Eine Gewichtsfunktion weist folgende Eigenschaften auf:

- i: $p_X(x) \in [0, 1]$ für alle x .
- ii: $\sum_{x_i \in \mathcal{W}(X)} p_X(x_i) = 1$.

Diskrete Verteilungsfunktion: Die Verteilungsfunktion F_X einer diskreten Zufallsvariable X mit Wertebereich $\mathcal{W}(X) = \{x_1, \dots, x_n\}$ ist die Funktion

$$F_X(t) = \mathbb{P}[X \leq t] = \sum_{\substack{x_k \in \mathcal{W}(X) \\ x_k \leq t}} p_X(x_k)$$

W.2.2 Stetige Zufallsvariablen

Dichte: Eine Zufallsvariable X mit der Verteilungsfunktion $F_X(t)$ heißt stetig mit *Dichte* $f_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, falls gilt

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(s) ds \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Für eine Dichtefunktion f_X gilt:

- i: $f_X(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
- ii: $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(s) ds = 1$.

Hinweis: Es gilt $\frac{d}{dt} F_X(t) = f_X(t)$ falls f_X an der Stelle t stetig ist.

W.2.3 Transformation von Zufallsvariablen

Satz: Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichte f_X und $f_X(t) = 0$ für $t \notin I \subseteq \mathbb{R}$. Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und streng monoton auf I mit Umkehrfunktion g^{-1} . Dann hat die Zufallsvariable $Y := g(X)$ die Dichte

$$f_Y = \begin{cases} f_X(g^{-1}(t)) \left| \frac{d}{dt} g^{-1}(t) \right| & \text{für } t \in \{g(x) | x \in I\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel (Lineare Transformation): Aus $Y := aX + b$ mit $a > 0, b \in \mathbb{R}$ folgt

$$F_Y(t) = \mathbb{P}[aX + b \leq t] = \mathbb{P}\left[X \leq \frac{t-b}{a}\right] = F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

und mit der Kettenregel ergibt sich

$$f_Y(t) = \frac{d}{dt} F_Y(t) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

Beispiel (Nichtlineare Transformation): Aus $Y := X^2$ folgt

$$F_Y(t) = \mathbb{P}[X^2 \leq t] = \mathbb{P}[-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}] = F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t})$$

und somit

$$f_Y(t) = \frac{d}{dt} F_Y(t) = \frac{f_X(\sqrt{t}) + f_X(-\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}$$

W.2.4 Simulation von Verteilungen

Satz: Sei F eine stetige und streng monoton wachsende Verteilungsfunktion mit Umkehrfunktion F^{-1} . Ist $X \sim \mathcal{U}(0, 1)$ und $Y := F^{-1}(X)$, so hat Y die Verteilungsfunktion F .

Beispiel: Um die Verteilung $Exp(\lambda)$ zu simulieren bestimmt man zu der Verteilungsfunktion $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ für $t \geq 0$ die Inverse $F^{-1}(t) = -\frac{\log(1-t)}{\lambda}$. Mit $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$ erhält man

$$X := F^{-1}(U) = -\frac{\log(1-U)}{\lambda} \sim Exp(\lambda).$$

W.2.5 Erwartungswert

Diskreter Erwartungswert: Ist X diskrete Zufallsvariable mit Gewichtsfunktion p_X , so ist der *Erwartungswert* von X definiert als

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x_i \in \mathcal{W}(X)} x_i p_X(x_i),$$

sofern diese Reihe konvergiert.

Stetiger Erwartungswert: Falls X eine stetige Zufallsvariable mit Dichte f_X ist, dann ist der *Erwartungswert* von X definiert als

$$\mathbb{E}[X] := \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx,$$

falls das Integral konvergiert.

Satz (4.1): Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Gewichtsfunktion p_X und $Y := g(X)$, dann gilt

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x_i \in \mathcal{W}(X)} g(x_i) p_X(x_i).$$

Falls X eine stetige Zufallsvariable mit Dichte f_X ist, ist analog

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

W.2.6 Varianz und Standardabweichung

Varianz: Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Die *Varianz* von X ist definiert als

$$\text{Var}[X] := \mathbb{E} [(X - \mathbb{E}(X))^2].$$

Hinweis: Nach Satz 4.1 lässt sich die Varianz folgendermaßen berechnen:

$$\text{Var}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 f_X(x) dx$$

Standardabweichung: Die *Standardabweichung* einer Zufallsvariable X ist

$$\sigma_X := \sqrt{\text{Var}[X]}.$$

W.3 Wichtige Verteilungen

W.3.1 Diskrete Verteilungen

W.3.1.1 Diskrete Gleichverteilung

Zufallsvariable X mit Wertebereich $\mathcal{W}(X) = \{x_1, \dots, x_n\}$ und alle Werte haben die gleiche Wahrscheinlichkeit falls

$$p_X(x_i) = \frac{1}{n} \quad \text{für } i \in \{1, \dots, n\}$$

Beispiel (Würfel): Die Zufallsvariable X gibt die Augenzahl bei einem Würfelwurf an. Der Wertebereich ist also $\mathcal{W} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und somit $n = 6$.

W.3.1.2 Bernoulli-Verteilung

Eine bernoulli-verteilte Zufallsvariable $X \sim Be(p)$ mit Parameter $p \in [0, 1]$ nimmt die Werte 0 und 1 mit Wahrscheinlichkeiten

$$p_X(1) = p \quad \text{und} \quad p_X(0) = 1 - p$$

an. Eine alternative Schreibweise ist

$$p_X(x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x} & x \in \{0, 1\} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Erwartungswert : p
 Varianz : $p(1-p)$

Beispiel (Münzwurf): Ein fairer Münzwurf ist bernoulli-verteilt mit Parameter $p = \frac{1}{2}$. Für einen Parameter $p \neq \frac{1}{2}$ wäre der Münzwurf unfair.

W.3.1.3 Binomialverteilung

Die Gewichtsfunktion p_X einer binomial-verteilten Zufallsvariable $X \sim Bin(n, p)$ mit Parameter $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$ ist gegeben durch

$$p_x(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{für } k \in \{0, \dots, n\}$$

Erwartungswert : np
 Varianz : $np(1-p)$

X ist die Anzahl der Erfolge k bei n unabhängigen Wiederholungen eines Bernoulli-Experiments. Es gibt $\binom{n}{k}$ verschiedene Möglichkeiten bei n Versuchen k -mal erfolgreich zu sein. Jeder dieser Möglichkeiten hat Wahrscheinlichkeit $p^k (1-p)^{n-k}$.

W.3.1.4 Geometrische Verteilung

Die Gewichtsfunktion p_X einer geometrisch-gleichverteilten Zufallsvariable $X \sim Geom(p)$ mit Parameter $p \in [0, 1]$ ist gegeben durch

$$p_X(k) = p(1-p)^{k-1} \quad \text{für } k \in \{1, 2, \dots\}$$

Erwartungswert : $\frac{1}{p}$
 Varianz : $\frac{1-p}{p^2}$

Beispiel (Wartezeit): Die Geometrische Verteilung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Anzahl X Bernoulli-Versuche, die notwendig sind, um den ersten Erfolg zu erzielen. Für die Anzahl Würfelfwürfe, die man braucht um eine 6 zu würfeln, ist $p = \frac{1}{6}$.

W.3.1.5 Negativbinomiale Verteilung

Die Gewichtsfunktion p_X einer negativ-binomial-verteilten Zufallsvariable X mit Parameter $r \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$ ist gegeben durch

$$p_X(k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \quad \text{für } k \in \{r, r+1, \dots\}$$

Erwartungswert : $\frac{r}{p}$
 Varianz : $\frac{r}{p^2}(1-p)$

X entspricht der Wartezeit auf den r -ten Erfolg. Es gibt $\binom{k-1}{r-1}$ Möglichkeiten für $r-1$ Erfolge bei $k-1$ Versuchen; der r -te Erfolg tritt ja beim k -ten Versuch ein.

W.3.1.6 Hypergeometrische Verteilung

Die Gewichtsfunktion p_X einer hypergeometrisch-verteilten Zufallsvariable X mit Parameter $r, n, m \in \mathbb{N}$, wobei $r, m \leq n$, ist gegeben durch

$$p_X(k) = \frac{\binom{r}{k} \binom{n-r}{m-k}}{\binom{n}{m}} \quad \text{für } k \in \{0, \dots, \min\{r, m\}\}$$

Erwartungswert : $m \frac{r}{n}$
 Varianz : $m \frac{r}{n} (1 - \frac{r}{n}) \frac{n-m}{n-1}$

In einer Urne befinden sich n Gegenstände. Davon sind r Gegenstände vom Typ A und $n-r$ vom Typ B. Es werden m Gegenstände ohne Zurücklegen gezogen. X beschreibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Anzahl k der Gegenstände vom Typ A in der Stichprobe.

Beispiel (Lotto): Anzahl Zahlen $n = 45$, richtige Zahlen $r = 6$, meine Zahlen $m = 6$. Die Wahrscheinlichkeit für 4 Richtige ist

$$p_X(4) = \frac{\binom{6}{4} \binom{39}{2}}{\binom{45}{6}} \approx 0.00136.$$

W.3.1.7 Poisson Verteilung

Die Gewichtsfunktion p_X einer Poisson-verteilten Zufallsvariable $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ mit Parameter λ ist gegeben durch

$$p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{für } k \in \{0, 1, \dots\}$$

Erwartungswert : λ
 Varianz : λ

Die Poisson-Verteilung eignet sich zur Modellierung von seltenen Ereignissen, wie z.B. Versicherungsschäden.

Hinweis: Die Binomialverteilung $Bin(n, p)$ kann approximativ durch die Poissonverteilung $\mathcal{P}(\lambda)$ mit $\lambda = np$ berechnet werden. Faustregel: Die Approximation kann für $np^2 \leq 0.05$ benutzt werden.

W.3.2 Stetige Verteilungen

W.3.2.1 Stetige Gleichverteilung

Die Dichte f_X und Verteilungsfunktion F_X einer stetigen und gleichverteilten Zufallsvariable $X \sim \mathcal{U}(a, b)$ mit Parameter

$a, b \in \mathbb{R}$ wobei $a < b$ sind gegeben durch

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } t \in [a, b] \\ 0 & \text{für } t \notin [a, b] \end{cases}$$

$$F_X = \begin{cases} 0 & \text{für } t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{für } t \in [a, b] \\ 1 & \text{für } t > b \end{cases}$$

Erwartungswert : $\frac{1}{2}(a+b)$
 Varianz : $\frac{1}{12}(a-b)^2$

Beispiel: Rundungsfehler einer Messung.

W.3.2.2 Exponentialverteilung

Die Dichte f_X und Verteilungsfunktion F_X einer exponentialverteilten Zufallsvariable $X \sim Exp(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$ sind gegeben durch

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

Erwartungswert : $\frac{1}{\lambda}$
 Varianz : $\frac{1}{\lambda^2}$

Beispiel (Lebensdauer): Die Exponentialverteilung ist eine typische Lebensdauerverteilung. So ist beispielsweise die Lebensdauer von elektronischen Bauelementen häufig annähernd exponentialverteilt.

W.3.2.3 Normalverteilung

Die Dichte f_X einer normalverteilten Zufallsvariable $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$ ist gegeben durch

$$f_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Für die Verteilungsfunktion F_X existiert kein geschlossener Ausdruck. Deshalb werden die Werte der Verteilungsfunktion $\Phi(t)$ der *Standard-Normalverteilung*

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

mit $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ tabelliert. Für allgemeine Normalverteilungen berechnet man dann

$$F_X(t) = \mathbb{P}[X \leq t] = \mathbb{P}\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{t-\mu}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right).$$

Erwartungswert : μ
 Varianz : σ^2

Beispiel: Streuung von Messwerten um den Mittelwert.

W.4 Gemeinsame Verteilungen

Gemeinsame Verteilung: Die *gemeinsame Verteilungsfunktion* von n Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n ist die Abbildung $F : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$,

$$F(t_1, \dots, t_n) := \mathbb{P}[X_1 \leq t_1, \dots, X_n \leq t_n].$$

Gemeinsame Gewichtsfunktion: Falls X_1, \dots, X_n diskrete Zufallsvariablen sind, ist ihre *gemeinsame Gewichtsfunktion* $p : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ definiert durch

$$p(x_1, \dots, x_n) := \mathbb{P}[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n].$$

Gemeinsame Dichte: Seien X_1, \dots, X_n stetige Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilungsfunktion $F(t_1, \dots, t_n)$. Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ heisst *gemeinsame Dichte* von X_1, \dots, X_n , falls für alle $t_i \in \mathbb{R}$ gilt

$$F(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{t_1} \dots \int_{-\infty}^{t_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1$$

Falls X_1, \dots, X_n eine gemeinsame Dichte f haben, so hat diese folgende Eigenschaften:

- i: $f(t_1, \dots, t_n) \geq 0$ für alle $t_i \in \mathbb{R}$.
- ii: $\int_{\mathbb{R}^n} f(t_1, \dots, t_n) d\mu = 1$.
- iii: $\mathbb{P}[(X_1, \dots, X_n) \in A] = \int_{(t_1, \dots, t_n) \in A} f(t_1, \dots, t_n) d\mu$.
- iv: $f(t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} F(t_1, \dots, t_n)$, falls definiert.

W.4.1 Randverteilungen

Randverteilung: Seien X und Y Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilungsfunktion $F_{X,Y}$, dann ist die *Randverteilung* $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ von X definiert durch

$$F_X := \mathbb{P}[X \leq x] = \mathbb{P}[X \leq x, Y < \infty] = \lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y).$$

Für zwei diskrete Zufallsvariablen X und Y mit gemeinsamer Gewichtsfunktion $p_{X,Y}(x, y)$ ist die Gewichtsfunktion der Randverteilung von X gegeben durch

$$p_X = \mathbb{P}[X = x] = \sum_j \mathbb{P}[X = x, Y = y_j] = \sum_j p_{X,Y}(x, y_j).$$

Für zwei stetige Zufallsvariablen X und Y mit gemeinsamer Dichte $f_{X,Y}(x, y)$ ist die Randdichte (Dichtefunktion der Randverteilung) von X gegeben durch

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy.$$

W.4.2 Bedingte Verteilung

Bedingte Gewichtsfunktion: Seien X und Y diskrete Zufallsvariablen mit gemeinsamer Gewichtsfunktion $p_{X,Y}(x, y)$, dann ist die *bedingte Gewichtsfunktion* $p_{X|Y}(x | y)$ von X gegeben Y definiert durch

$$p_{X|Y}(x | y) := \mathbb{P}[X = x | Y = y] = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}$$

falls $p_Y(y) > 0$ und 0 falls $p_Y(y) = 0$.

Bedingte Dichte: Für zwei stetige Zufallsvariablen X und Y mit gemeinsamer Dichte $f_{X,Y}(x, y)$ ist die *bedingte Dichte* $f_{X|Y}$ von X gegeben Y definiert durch

$$f_{X|Y}(x | y) := \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

falls $f_Y(y) > 0$ und 0 falls $f_Y(y) = 0$.

W.4.3 Unabhängigkeit

Unabhängigkeit: Die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n heissen *unabhängig*, falls die gemeinsame Verteilungsfunktion das Produkt der Verteilungsfunktionen der Randverteilungen ist:

$$F(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i)$$

Im diskreten Fall sind X_1, \dots, X_n unabhängig, genau dann wenn

$$p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n p_{X_i}(x_i)$$

gilt und analog im stetigen Fall, falls

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i).$$

W.4.4 Funktionen von Zufallsvariablen

Ausgehend von den Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n kann man mit einer Funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine neue Zufallsvariable $Z = g(X_1, \dots, X_n)$ bilden.

Beispiel (Summe, diskret): Für die Gewichtsfunktion p_Z der Summe $Z = X + Y$ zweier diskreten Zufallsvariablen X und Y mit gemeinsamer Gewichtsfunktion p erhält man

$$p_Z(z) = \sum_{x_i \in \mathcal{W}(X)} \mathbb{P}[X = x_i, Y = z - x_i] = \sum_{x_i \in \mathcal{W}(X)} p(x_i, z - x_i)$$

Beispiel (Summe, stetig): Sind X und Y stetige Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte f , so ist die Verteilungsfunktion F_Z der Summe $Z = X + Y$ gegeben durch

$$F_Z = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y) dy dx \stackrel{v=x+y}{=} \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v-x) dx dv$$

und somit auch die Dichte

$$f_Z = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x) dx.$$

W.4.4.1 i.i.d Annahme

Die Abkürzung *i.i.d.* kommt vom Englischen *independent and identically distributed*. Die n -fache Wiederholung eines Zufallsexperiments ist selbst wieder ein Zufallsexperiment. Für die Zufallsvariablen X_i der i -ten Wiederholung wird oft aus Gründen der Einfachheit Folgendes angenommen:

- i: X_1, \dots, X_n sind paarweise unabhängig.
- ii: Alle X_i haben dieselbe Verteilung.

W.4.4.2 Spezielle Funktionen von Zufallsvariablen

Wichtige Spezialfälle sind die Summe $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ und das arithmetische Mittel $\bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$.

1. Wenn $X_i \sim Be(p)$, dann ist $S_n \sim Bin(n, p)$.
2. Wenn $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda)$, dann ist $S_n \sim \mathcal{P}(n\lambda)$.
3. Wenn $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, dann ist $S_n \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$.

Für den Erwartungswert und die Varianz gilt allgemein

$$\mathbb{E}[S_n] = n\mathbb{E}[X_i] \quad \text{Var}[S_n] = n\text{Var}[X_i]$$

W.4.5 Erwartungswert

Hinweis: Der Erwartungswert einer n -dimensionalen Verteilung wird als n -Tupel der Erwartungswerte aller Randverteilungen $\mathbb{E}[X_i]$ angegeben.

Satz (4.2): Für den Erwartungswert $\mathbb{E}[Y]$ einer Funktion $Y := g(X_1, \dots, X_n)$ der Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n gilt im diskreten Fall

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{x_1, \dots, x_n} g(x_1, \dots, x_n) p(x_1, \dots, x_n)$$

und analog im stetigen Fall

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}^n} \dots \int g(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1.$$

Satz (4.4): Seien X_1, \dots, X_n Zufallsvariablen mit endlichen Erwartungswerten $\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_n]$, dann ist

$$\mathbb{E} \left[a + \sum_{i=1}^n b_i X_i \right] = a + \sum_{i=1}^n b_i \mathbb{E}[X_i].$$

W.4.6 Kovarianz und Korrelation

Kovarianz: Seien X und Y Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ und $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$, dann ist die *Kovarianz* von X und Y gegeben durch

$$\text{Cov}[X, Y] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))].$$

Es gelten folgende Rechenregeln:

- i: $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.
- ii: $\text{Var}[a + bX] = b^2 \text{Var}[X]$.
- iii: $\text{Var}[a + \sum_{i=1}^n b_i X_i] = \sum_{i=1}^n b_i^2 \text{Var}[X_i]$, für X_i unabhängig.
- iv: $\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2\text{Cov}[X, Y]$.
- v: $\text{Cov}[X, Y] = \text{Cov}[Y, X]$.
- vi: $\text{Cov}[X, X] = \text{Var}[X]$.
- vii: $\text{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.
- viii: $\text{Cov}[X, a] = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$.
- ix: $\text{Cov}[X, bY] = b\text{Cov}[X, Y]$ für alle $b \in \mathbb{R}$.
- x: $\text{Cov}[X, Y + Z] = \text{Cov}[X, Y] + \text{Cov}[X, Z]$.
- xi: $\text{Cov}[a + \sum_{i=1}^n b_i X_i, c + \sum_{j=1}^m d_j Y_j] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_i d_j \text{Cov}[X_i, Y_j]$
- xii: $\text{Cov}[X, Y] = 0$, falls X und Y unabhängig.

Korrelation: Seien X und Y Zufallsvariablen, dann heisst

$$\text{Corr}[X, Y] := \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{Var}[X]}\sqrt{\text{Var}[Y]}}$$

Korrelation von X und Y . Ist $\text{Corr}[X, Y] = 0$, oder äquivalent $\text{Cov}[X, Y] = 0$, dann heissen X und Y unkorreliert.

Hinweis: Die Korrelation misst die Stärke und Richtung der *linearen Abhängigkeit* zweier Zufallsvariablen X und Y :

$$\text{Corr}[X, Y] = \pm 1 \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, b > 0 : Y = a \pm bX$$

Hinweis: Sind X und Y unabhängig, dann ist $\text{Cov}[X, Y] = 0$ und $\text{Corr}[X, Y] = 0$. Die Umkehrung gilt aber im Allgemeinen nicht.

W.5 Grenzwertsätze

W.5.1 Gesetz der grossen Zahlen

Satz (Schwaches GGZ): Für eine Folge X_1, X_2, \dots von unkorrelierten Zufallsvariablen, die alle den Erwartungswert $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ und die Varianz $\text{Var}[X_i] = \sigma^2$ haben, gilt

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu = \mathbb{E}[X_i].$$

Das heisst

$$\mathbb{P} [|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \epsilon > 0.$$

Satz (Starkes GGZ): Für eine Folge X_1, X_2, \dots unabhängiger Zufallsvariablen, die alle den endlichen Erwartungswert $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ haben, gilt

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu = \mathbb{E}[X_i]. \quad \text{P-fast sicher}$$

Das heisst

$$\mathbb{P} \left[\{ \omega \in \Omega \mid \bar{X}_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu \} \right] = 1.$$

W.5.2 Zentraler Grenzwertsatz

Satz (ZGS): Sei X_1, X_2, \dots eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ und $\sigma^2 = \text{Var}[X_i]$, dann gilt für die Summe $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq t \right] = \Phi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion von $\mathcal{N}(0, 1)$ ist.

Hinweis: Die Summe S_n hat Erwartungswert $\mathbb{E}[S_n] = n\mu$ und Varianz $\text{Var}[S_n] = n\sigma^2$. Die Grösse

$$S_n^* := \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\text{Var}[S_n]}}$$

hat Erwartungswert 0 und Varianz 1. Für grosse n gilt zudem:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S_n^* \leq x] &\approx \Phi(x) \\ S_n^* &\overset{\text{approx.}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1) \\ S_n &\overset{\text{approx.}}{\sim} \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2) \end{aligned}$$

W.5.3 Chebyshev-Ungleichung

Für eine Zufallsvariable Y mit Erwartungswert μ_Y und Varianz σ_Y^2 und jedes $\epsilon > 0$ gilt

$$\mathbb{P}[|Y - \mu_Y| > \epsilon] \leq \frac{\sigma_Y^2}{\epsilon^2}.$$

W.5.4 Monte Carlo Integration

Das Integral

$$I := \int_0^1 g(x)dx$$

lässt sich als Erwartungswert auffassen, denn mit einer gleichverteilten Zufallsvariable $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$ folgt

$$\mathbb{E}[g(U)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_U(x)dx = \int_0^1 g(x)dx.$$

Mit einer Folge von Zufallsvariablen U_1, \dots, U_n , die unabhängig gleichverteilt $U_i \sim \mathcal{U}(0, 1)$ sind, lässt sich das Integral approximieren: Nach dem schwachen Gesetz der grossen Zahlen gilt

$$\overline{g(U_n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(U_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[g(U_1)] = I.$$

Statistik

S.1 Grundlagen

Stichprobe: Die Gesamtheit der Beobachtungen x_1, \dots, x_n oder der Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n wird *Stichprobe* genannt; die Anzahl n heisst *Stichprobenumfang*.

Empirische Verteilungsfunktion: Die *empirische Verteilungsfunktion* F_n zu den Messdaten x_1, \dots, x_n ist definiert durch

$$F_n(y) := \frac{1}{n} |\{x_i \mid x_i \leq y\}| = \frac{1}{n} \sum_{i \text{ mit } x_i \leq y} f_i.$$

Empirischer Mittelwert:

$$\bar{x}_n = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Empirische Varianz und Standardabweichung:

$$s_n^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Empirisches Quantil: Das *empirische α -Quantil* zu den geordneten Daten $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ ist gegeben durch

$$(1 - \alpha)x_{(k)} + \alpha x_{(k+1)} = x_{(k)} + \alpha(x_{(k+1)} - x_{(k)}),$$

wobei $k = \lfloor \alpha n \rfloor$ und $\alpha \in (0, 1)$. Damit liegt etwa der Anteil α unterhalb des empirischen α -Quantils, und somit etwa der Anteil $1 - \alpha$ oberhalb.

Empirischer Median: Der *empirische Median* ist definiert als das 0.5-Quantil.

S.2 Deskriptive Statistik

S.2.1 Histogramm

Bei grossem Stichprobenumfang n werden benachbarte Werte zu einer Klasse zusammengefasst. Der Wertebereich der Daten wird dadurch in disjunkte Intervalle (die Klassen) unterteilt.

- i) Die Anzahl der Klassen sollte von der Grössenordnung \sqrt{n} sein.
- ii) Die Klassenbreite sollte für alle Klassen gleich sein; als Ausnahme können die Klassen am linken und rechten Rand grösser sein (Ausreisser).

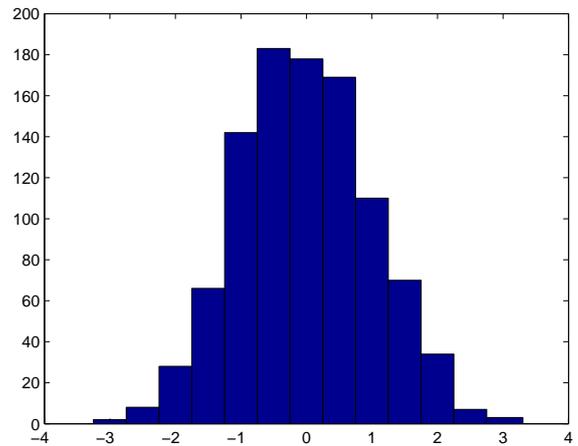


Abb. 1: Histogramm einer standard-normalverteilten Zufallsvariable.

S.2.2 Boxplot

Aus einem Boxplot lässt sich folgendes ablesen:

- a: empirischer Median
- b: empirisches 0.25-Quantil
- c: empirisches 0.75-Quantil
- d: kleinster Datenwert x_i mit $b - x_i < 1.5(c - b)$
- e: grösster Datenwert x_i mit $x_i - c < 1.5(c - b)$
- f: Ausreisser

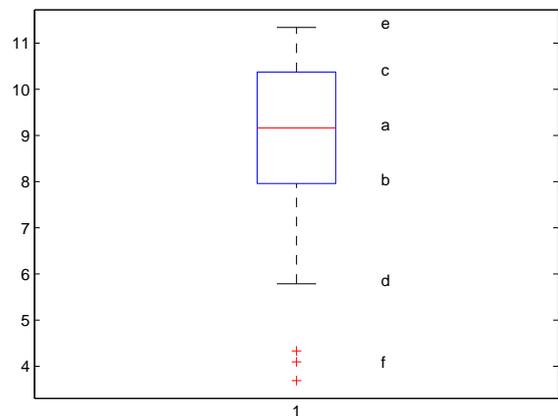


Abb. 2: Boxplot

S.2.3 QQ-Plot

Mit einem *QQ-Plot* (Quantil-Quantil) kann man die Abweichung der Daten von einer gewählten Modell-Verteilung F graphisch überprüfen.

Es werden die empirischen Quantile auf der y -Achse gegenüber den theoretischen Quantilen auf der x -Achse geplottet.

S.3 Schätzer

Für eine Stichprobe X_1, \dots, X_n soll ein passendes Modell gefunden werden. Die Parameter $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_m)$ des Modells versucht man mit einem *Schätzer* $T = (T_1, \dots, T_m)$ aufgrund der Stichprobe herauszufinden. Die Schätzer sind Zufallsvariablen der Form $T_j = t_j(X_1, \dots, X_n)$ für eine geeignete Funktion $t_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Durch Einsetzen von Daten x_i erhält man *Schätzwertwerte* $t_j(x_1, \dots, x_n)$ für ϑ_j .

Erwartungstreu: Ein Schätzer T heisst *erwartungstreu* für ϑ , falls $\mathbb{E}[T] = \vartheta$ (im Mittel wird richtig geschätzt).

Konsistent: Eine Folge von Schätzern $T^{(n)}, n \in \mathbb{N}$ heisst *konsistent* für ϑ , falls $T^{(n)}$ für $n \rightarrow \infty$ im Modell \mathbb{P}_ϑ gegen ϑ konvergiert. Das heisst für jedes $\vartheta \in \Theta$ und $\epsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[|T^{(n)} - \vartheta| > \epsilon] = 0.$$

Hinweis: Der Grundraum Ω und die Menge der beobachtbaren Ereignisse \mathcal{F} sind fest. Die Wahl des Parameters ϑ aus dem Parameterraum Θ hat aber Einfluss auf das Wahrscheinlichkeitsmass \mathbb{P}_ϑ . Mit \mathbb{E}_ϑ wird der Erwartungswert unter \mathbb{P}_ϑ bezeichnet.

S.3.1 Momenten-Methode

Moment: Das k -te *Moment* einer Zufallsvariablen X im Modell \mathbb{P}_ϑ ist

$$\mu_k := \mu_k(\vartheta) := \mathbb{E}_\vartheta[X^k].$$

Stichprobenmoment: Das k -te *Stichprobenmoment* von Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n ist

$$\hat{\mu}_k := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k.$$

Die Parameter ϑ_i der theoretischen Verteilung werden als Funktion der Momente μ_k angegeben.

$$\vartheta_j = g_j(\mu_1, \dots, \mu_m) \quad \text{für } j \in \{1, \dots, m\}$$

Den *Momentenschätzer* für $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_m)$ erhält man, indem man die Stichprobenmomente in die Funktionen der Momente einsetzt; der Schätzer ist also $T = (T_1, \dots, T_m)$ mit

$$T_j := g_j(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_m) \quad \text{für } j \in \{1, \dots, m\}$$

Beispiel: Gegeben seien n unabhängige Realisierungen x_1, \dots, x_n einer Zufallsvariablen $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Es gilt $\mathbb{E}[X] = \lambda$. Für die Funktion g_1 kann also die Identität gewählt werden. Der Momentenschätzer ist somit

$$\lambda_{\text{MM}} = \hat{\mu}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}.$$

Es gilt aber auch $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \lambda$. Es kann also auch $g_1(\mu_1, \mu_2) = \mu_2 - \mu_1^2$ gewählt werden. Dadurch erhält man einen anderen Momentenschätzer

$$\lambda_{\text{MM}} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

S.3.2 Maximum-Likelihood

Es wird von einer Zufallsvariable X_1, \dots, X_n ausgegangen, deren gemeinsame Dichte $f(t_1, \dots, t_n | \vartheta)$ von einem Parameter ϑ abhängt. Die *Likelihood-Funktion* \mathcal{L} ist gegeben durch

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n | \vartheta) = f(x_1, \dots, x_n | \vartheta).$$

Anschaulich ist das die Wahrscheinlichkeit¹, dass im Modell \mathbb{P}_ϑ die Stichprobe X_1, \dots, X_n die Werte x_1, \dots, x_n liefert. Um eine möglichst gute Anpassung des Modells an die Daten zu erreichen, wird der Likelihood-Schätzer als Funktion von ϑ maximiert.

Hinweis: Im diskreten Fall wird lediglich die Dichte f durch die Gewichtsfunktion p ersetzt.

Oft sind die Zufallsvariablen X_i unter \mathbb{P}_ϑ i.i.d. mit Dichtefunktion $f(t | \vartheta)$, so dass sich die Likelihood-Funktion vereinfacht zu

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n | \vartheta) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \vartheta).$$

Aufgrund der Monotonie des Logarithmus kann dann die logarithmierte Likelihood-Funktion verwendet werden, ohne dass sich dadurch das Maximum der Funktion verschiebt.

$$\log \mathcal{L}(x_1, \dots, x_n | \vartheta) = \sum_{i=1}^n \log f(x_i | \vartheta)$$

Beispiel: Gegeben seien n unabhängige Realisierungen x_1, \dots, x_n einer Zufallsvariable $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ mit Dichte $f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(t)$ und unbekanntem Parameter λ . Für die Likelihood-Funktion erhält man

$$\mathcal{L}(\lambda) := \mathcal{L}(x_1, \dots, x_n | \lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i}$$

und durch logarithmieren

$$\log \mathcal{L}(\lambda) = \sum_{i=1}^n \log \lambda e^{-\lambda x_i} = n \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i.$$

Zur Bestimmung des Maximums wird die Ableitung nullgesetzt:

$$\frac{d}{d\lambda} \log \mathcal{L}(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\text{LH}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}$$

Aus $\frac{d^2}{d\lambda^2} \log \mathcal{L}(\lambda) = -\frac{n}{\lambda^2} < 0$ für $\lambda > 0$ folgt, dass es sich auch tatsächlich um ein Maximum handelt.

¹oder zumindest das stetige Pendant zur Wahrscheinlichkeit.

S.4 Tests

S.4.1 Fehler 1. und 2. Art

Fehler 1. Art: Die Hypothese wird zu Unrecht abgelehnt, d.h. obwohl sie richtig ist. Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art ist

$$\mathbb{P}_\vartheta[T \in K] \quad \text{für } \vartheta \in \Theta_0.$$

Fehler 2. Art: Die Hypothese wird akzeptiert, obwohl sie falsch ist. Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art ist

$$\mathbb{P}_\vartheta[T \notin K] = 1 - \mathbb{P}_\vartheta[T \in K] \quad \text{für } \vartheta \in \Theta_A.$$

S.4.2 Mögliches Vorgehen

Ausgangspunkt ist eine Stichprobe X_1, \dots, X_n in einem Modell \mathbb{P}_ϑ mit unbekanntem Parameter $\vartheta \in \Theta$.

1: Aufgrund einer Vermutung, wo sich der richtige Parameter ϑ befindet, werden eine *Hypothese* $\Theta_0 \subseteq \Theta$ und eine *Alternative* $\Theta_A \subseteq \Theta$ mit $\Theta_0 \cap \Theta_A = \emptyset$ formuliert:

$$\begin{aligned} \text{Hypothese } H_0 : \vartheta &\in \Theta_0 \\ \text{Alternative } H_A : \vartheta &\in \Theta_A \end{aligned}$$

Hinweis: Die Hypothese (bzw. Alternative) heisst *einfach*, falls sie nur aus einem einzelnen Wert besteht, also z.B. $\Theta_0 = \{\vartheta_0\}$ (bzw. $\Theta_A = \{\vartheta_A\}$).

2. Es wird eine *Teststatistik* $T = t(X_1, \dots, X_n)$ gewählt, wobei $t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine geeignete Funktion ist.
3. Es wird ein *Signifikanzniveau* $\alpha \in (0, 1)$ gewählt.
4. Ein *Verwerfungsbereich* $K \subseteq \mathbb{R}$ wird konstruiert, so dass

$$\sup_{\vartheta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\vartheta[T \in K] \leq \alpha.$$

Dadurch wird die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art durch α beschränkt.

5. Die Hypothese wird verworfen, falls der realisierte Wert $t(x_1, \dots, x_n)$ im Verwerfungsbereich K liegt.

Hinweis: Alternative zu Schritt 4 und 5: Der P-Wert p wird berechnet und die Hypothese verworfen, falls $p \leq \alpha$.

P-Wert: Der P-Wert ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter der Nullhypothese H_0 ein zufälliger Versuch mindestens so extrem ausfällt, wie der beobachtete Wert t .

Macht: Die *Macht* eines Tests ist die Funktion

$$\beta : \Theta_A \rightarrow [0, 1], \quad \vartheta \mapsto \beta(\vartheta) := \mathbb{P}_\vartheta[T \in K].$$

Das Maximieren der Macht $\beta(\vartheta)$ entspricht dem Minimieren der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art $1 - \beta(\vartheta) = \mathbb{P}_\vartheta[T \notin K]$ für $\vartheta \in \Theta_A$.

S.4.3 Likelihood-Quotienten Test

Als Teststatistik wird der *Likelihood-Quotient* \mathcal{R} gewählt, wobei \mathcal{L} die Likelihood-Funktion ist:

$$T := \mathcal{R}(x_1, \dots, x_n) := \frac{\sup_{\vartheta \in \Theta_0} \mathcal{L}(x_1, \dots, x_n | \vartheta)}{\sup_{\vartheta \in \Theta_A} \mathcal{L}(x_1, \dots, x_n | \vartheta)}$$

Ist dieser Quotient klein, sind die Beobachtungen im Modell \mathbb{P}_{Θ_A} deutlich wahrscheinlicher als im Modell \mathbb{P}_{Θ_0} . Der Verwerfungsbereich $K := [0, c]$ wird so gewählt, dass der Test das gewünschte Signifikanzniveau einhält.

Hinweis: Sind Hypothese und Alternative beide einfach, so ist der Test optimal (nach Neyman-Pearson-Lemma).

S.4.4 z-Test

Seien $X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(\vartheta_0, \sigma^2)$ unter \mathbb{P}_{ϑ_0} mit *bekannter* Varianz σ^2 . Es soll die Hypothese $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ getestet werden. Mögliche Alternativen H_A sind $\vartheta > \vartheta_0$, $\vartheta < \vartheta_0$ (einseitig) oder $\vartheta \neq \vartheta_0$ (zweiseitig). Die Teststatistik ist

$$T := \frac{\bar{X}_n - \vartheta_0}{\sigma_X / \sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

unter dem Modell \mathbb{P}_{ϑ_0} . Der Verwerfungsbereich ist von der Form $(c_>, \infty)$, bzw. $(-\infty, c_<)$, bzw. $(-\infty, -c_\neq) \cup (c_\neq, \infty)$. Zum Beispiel liefert die Bedingung

$$\alpha = \mathbb{P}_{\vartheta_0}[T \in K_>] = \mathbb{P}_{\vartheta_0}[T > c_>] = 1 - \Phi(c_>),$$

dass $c_> = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$, also das $(1 - \alpha)$ -Quantil der $\mathcal{N}(0, 1)$ -Verteilung, sein muss.

S.4.5 t-Test

Seien $X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2)$ unter \mathbb{P}_ϑ wobei $\vartheta = (\mu, \sigma^2)$ und insbesondere die Varianz σ^2 *unbekannt* ist. Die Hypothese $H_0 : \mu = \mu_0$ soll getestet werden. Die unbekannte Varianz σ^2 wird durch den Schätzer $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ (empirische Varianz) ersetzt. Danach kann mit der Teststatistik

$$T := \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

gleich wie beim z-Test vorgegangen werden.

S.4.6 Gepaarter Zweistichprobentest

Seien $X_{1 \leq i \leq n} \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$ und $Y_{1 \leq i \leq n} \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$ unter \mathbb{P}_ϑ . Falls man eine natürliche Paarbildung zwischen X_i und Y_i hat, lässt der Test zum Vergleich von μ_X und μ_Y auf eine Stichprobe zurückführen:

$$Z_i := X_i - Y_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(\mu_x - \mu_y, 2\sigma^2)$$

S.4.7 Ungepaarter Zweistichprobentest

Seien $X_{1 \leq i \leq n} \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$ und $Y_{1 \leq i \leq m} \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$ unter \mathbb{P}_ϑ .

a) Ist σ^2 bekannt, so ist die Teststatistik

$$T := \frac{(\bar{X}_n - \bar{Y}_m) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

b) Ist σ^2 unbekannt, berechnet man

$$s^2 := \frac{1}{m+n-2}((n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2)$$

und wählt für die Teststatistik

$$T := \frac{(\bar{X}_n - \bar{Y}_m) - (\mu_X - \mu_Y)}{s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t_{n+m-2}$$

S.4.8 Konfidenzbereiche

Konfidenzbereich: Ein *Konfidenzbereich* für ϑ zu den Stichproben X_1, \dots, X_n ist eine Menge $C(X_1, \dots, X_n) \subseteq \Theta$. In den meisten Fällen ist das ein Intervall, dessen Endpunkte von X_1, \dots, X_n abhängen.

C heisst ein Konfidenzbereich zum Niveau $1 - \alpha$, falls gilt

$$\mathbb{P}_\vartheta[\vartheta \in C(X_1, \dots, X_n)] \geq 1 - \alpha$$

Anhang

A.1 Kombinatorik

Ziehen von k Elementen aus einer Menge mit n Elementen

	geordnet	ungeordnet
mit zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
ohne zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

A.2 Reihen und Integrale

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= \frac{n(n+1)}{2} \\ \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \sum_{k=0}^n a_0 q^k &= a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\ \sum_{k=0}^\infty a_0 q^k &= \frac{a_0}{1-q} \\ \sum_{k=0}^\infty \frac{k}{a^k} &= \frac{a}{(a-1)^2}, \quad |a| > 1 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Partielle Integration:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Substitutionsregel:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx \stackrel{t=g(x)}{=} \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

Bei den folgenden Integralen wurden die Integrationskonstanten weggelassen.

$$\begin{aligned} \int a \, dx &= ax \\ \int x^a \, dx &= \frac{1}{a+1}x^{a+1}, \quad a \neq -1 \\ \int (ax+b)^c \, dx &= \frac{1}{a(c+1)}(ax+b)^{c+1}, \quad c \neq -1 \\ \int \frac{1}{x} \, dx &= \log|x|, \quad x \neq 0 \\ \int \frac{1}{ax+b} \, dx &= \frac{1}{a} \log|ax+b| \\ \int \frac{1}{x^2+a^2} \, dx &= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \\ \int e^{ax} \, dx &= \frac{1}{a}e^{ax} \\ \int xe^{ax} \, dx &= \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) \\ \int x^2e^{ax} \, dx &= e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) \\ \int \log|x| \, dx &= x(\log|x| - 1) \\ \int \log_a|x| \, dx &= x(\log_a|x| - \log_a e) \\ \int x^a \log x \, dx &= \frac{x^{a+1}}{a+1} \left(\log x - \frac{1}{a+1} \right), \quad a \neq -1, x > 0 \\ \int \frac{1}{x} \log x \, dx &= \frac{1}{2} \log^2 x, \quad x > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sin(ax+b) \, dx &= -\frac{1}{a} \cos(ax+b) \\ \int \cos(ax+b) \, dx &= \frac{1}{a} \sin(ax+b) \\ \int \tan x \, dx &= -\log|\cos x| \\ \int \frac{1}{\sin x} \, dx &= \log\left| \tan \frac{x}{2} \right| \\ \int \frac{1}{\cos x} \, dx &= \log\left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| \\ \int \sin^2 x \, dx &= \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) \\ \int \cos^2 x \, dx &= \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) \\ \int \tan^2 x \, dx &= \tan x - x \\ \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx &= \log|f(x)| \end{aligned}$$